# TD$_{17}$ – Équations différentielles

## Exercice 1 ★

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + \cos(x)y = 0$
2. $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$
3. $y' + \cos^3(x)y = 0$
4. $(1+x^2)y' - 2xy = 0$
5. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 0.$

## Exercice 2 ★

Résoudre les équations homogènes suivantes sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

1. $(1+x^2)y' + xy = 0$
2. $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$
3. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$
4. $xy' + x^2y = 0$
5. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$

## Exercice 3 ★

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \qquad y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t$$

$$(E_2) \qquad y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t + \cos(t)$$

## Exercice 4 ★★

Résoudre les équations différentielles suivantes, en étudiant les éventuels raccordements :

$$(E_1) \qquad t(t-1)y' + y = t$$

$$(E_2) \qquad (\mathrm{e}^t - 1)y' + (\mathrm{e}^t + 1)y = 3 + 2\mathrm{e}^t$$

## Exercice 5 ★★

Résoudre $|x|y' - y = x^2$.

## Exercice 6 ★★

Soit $a$ un réel strictement négatif. Résoudre $(E)$ : $ty'' + 2y' - aty = 0$ en posant $z(t) = ty(t)$.

## Exercice 7 ★★

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels et $c$ une fonction continue, le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante, appelée équation d'Euler :

$$t^2y'' + aty' + by = c(t) \qquad (\mathcal{E})$$

Elle ne fait pas partie des équations que le cours nous apprend à résoudre. Via un *changement de fonction inconnue* on va se ramener à une équation que l'on sait traiter

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$

2. Soit $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array}$.
   Justifier que $z$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $z'$ et $z''$ en fonction de $y$ et de ses dérivées.
3. Montrer que $y$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
4. Résoudre l'équation d'Euler
   $$t^2y'' - ty' + 5y = 0 \qquad (\mathcal{E}_1)$$

## Exercice 8 ★★

On considère l'équation différentielle $(E) : xy''(x) - y'(x) + 4x^3y(x) = 0$.

1. Pour $t \in ]0, +\infty[$, on pose $f(t) = y(\sqrt{t})$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f$ équivalente à celle vérifiée par $y$.
2. Résoudre $(E)$ sur $]0, +\infty[$.
3. Résoudre $(E)$ sur $]-\infty, 0[$.
4. Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 9 ★★

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$$

1. À l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer les solutions de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$
2. En déduire les solutions de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$.

## Exercice 10 ★★★

Soit $(E) : (1 - t^2)y'' - ty' + y = 0$.

1. Résoudre $(E)$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ (on pourra poser $t = \cos(u)$).
2. Résoudre $(E)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ (faire un changement de variable bien choisi comme en 1.)
3. À l'aide du résultat de la question 2., résoudre $(E)$ sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
4. Déterminer les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Retrouver les résultats précédents par une autre méthode.

## Exercice 11 ★★

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 1 \qquad \text{sur } ]0, +\infty[$$

Résoudre $(E)$ en posant $z : t \mapsto t^2y(t)$

## Exercice 12 ★★

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad (1 + x)y'' - y' - xy = 0 \qquad \text{sur } ]-1, +\infty[$$

1. Déterminer une solution de $(E)$ de la forme $x \mapsto \exp(\alpha x)$
2. En déduire toutes les solutions de $(E)$.

## Exercice 13 ★★★

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad (1 + x^2)y'' + 4xy' + \frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1. Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. $h$ est elle solution de $(E)$ ?
2. En déduire toutes les solutions de $(E)$.

## Exercice 14 ★★

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = x - y \end{array}\right. \qquad (S')\left\{\begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = 2y \end{array}\right.$$

## Exercice 15 ★★★

À l'aide d'un système différentiel linéaire, résoudre l'équation linéaire d'ordre 3 :

$$y^{(3)} - 3y'' - y' + 3y = 0.$$

.

## Exercice 16 ★★

Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$ on pose $f(P) = (X+1)P' + P$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$
2. À l'aide de sa matrice dans la base canonique, justifier que $f$ est diagonalisable.
3. Déterminer les éléments propres de $f$.

## Exercice 17 ★★

Soit $E$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ qui s'annulent en 0.

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel
2. Soit $f \in E$, montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.
3. Pour $f \in E$ et $x \geqslant 0$ on pose $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $T(f)$ est bien définie et que $T(f) \in E$.
4. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.
5. Étudier les éléments propres de $T$.

## Exercice 18 ★★★

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad xy'' + 2y' + xy = 0$$

1. Montrer que $(E)$ admet une solution développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
2. Reconnaître cette solution puis résoudre $(E)$.

# Exercices issus d'oraux

## Exercice 19 ★★★

(*Oral 2008*)

Déterminer les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + -f(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

On pourra introduire les fonctions $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$ et $h : x \mapsto f(x) + f(-x)$

## Exercice 20 ★★★

(*Oral 2011*)

Résoudre à l'aide de séries entières, l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = x + 2$

## Exercice 21 ★★★

(*Oral 2012*)

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle $u'' - u = 0$
2. Effectuer le changement de fonction $y : x \mapsto \dfrac{z(x)}{x^2}$ dans $(E)$
3. Déterminer les solutions de $(E)$ développables en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite finie à droite en 0 ?

## Exercice 22 ★★

(*Oral 2019*)

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 7x - y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

# Corrigés des exercices

## Corrigé de l'exercice 1

1. $y' + \cos(x)y = 0$

   Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ en est une. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto Ke^{-\sin(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto e^{-\sin(x)}\right)$$

2. $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_2 = \left\{x \mapsto Ke^{-\ln(|\ln(x)|)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{K}{|\ln(x)|}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{|\ln(x)|}\right)$$

3. $y' + \cos^3(x)y = 0$

   Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$, pour cela on va linéariser $\cos^3(x)$

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$$

   Un primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ est alors $x \mapsto \dfrac{\sin(3x) + 9\sin(x)}{12}$

   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto K\exp\left(-\frac{\sin(3x) + 9\sin(x)}{12}\right)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(-\frac{\sin(3x) + 9\sin(x)}{12}\right)\right)$$

4. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$

   $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule jamais, notre équation différentielle est donc équivalente à l'équation

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}y = 0$$

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{-2x}{1 + x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1 + x^2)$.

   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{\ln(1+x^2)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto K(1 + x^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto (1 + x^2)\right)$$

5. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 0$.

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1 - 2x}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$.

   L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_5 = \left\{x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}+2\ln(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto Kx^2e^{\frac{1}{x}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto x^2e^{\frac{1}{x}}\right)$$

## Corrigé de l'exercice 2

1. $(1+x^2)y' + xy = 0$

   La fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, notre équation différentielle est alors équivalente à
$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$, i.e. $x \mapsto \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$, $K \in \mathbb{R}$.

   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $((1+x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ est donc
$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

2. $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$

   On se place sur $]-1,+\infty[$. Notre équation différentielle est équivalente à $y' - \dfrac{1}{2+2x}y = 0$.

   Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$

   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$ sur $]-1,+\infty[$ est alors
$$\left\{x \mapsto K\sqrt{1+x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

3. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$

   On se place sur $]-\infty,1[$. Sur cet intervalle, une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{1-x}$

   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$ sur $]-\infty,1\}$ est alors
$$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto Ke^{-2\sqrt{1-x}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

4. $xy' + x^2y = 0$

   On se place sur $]0,+\infty[$, sur cet intervalle notre équation est équivalente à $y' + xy = 0$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.

   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + x^2y = 0$ sur $]0,+\infty[$ est alors
$$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

5. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$

   On sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de degré 1 est un espace vectoriel de dimension 1. Il est donc engendré par n'importe lequel de ses éléments non-nuls. On peut remarquer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une solution de cette équation différentielle, ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ est
$$\mathcal{S}_5 = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(x)) = \{x \mapsto K\cos(x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

---

## Corrigé de l'exercice 3

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solution $j = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $h_{A,B} : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre en appliquant le principe de superposition des solutions : on va rechercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda e^t$ pour le second membre $e^t$, puis rechercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto at^2 + bt + c$ pour le second membre $t^2$.

Finalement l'ensemble des solutions de $(E_1)$ est

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ t \longmapsto e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{3}e^t + t^2 - 2t\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a pour solution double 1

   Les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $h_{A,B} : t \mapsto (A + Bt)e^t$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

   On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre en appliquant le principe de superposition des solutions : on va rechercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda t^2 e^t$ pour le second membre $e^t$, puis rechercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ pour le second membre $\cos(t)$ (la famille $(\cos, \sin)$ est libre ce qui permet d'identifier les coefficients.)

   Finalement l'ensemble des solutions de $(E_2)$ est

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ t \longmapsto (A + tB)e^t + \frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{2}\sin t\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

## Corrigé de l'exercice 4

1. — On résout d'abord sur $I = ]-\infty, 0[$ ou $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$ :

   Sur chacun de ces intervalles l'équation est équivalente à $y' + \frac{1}{t(t-1)}y = \frac{1}{t-1}$.

   Pour primitiver la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(t-1)}$ on réalise une décomposition en éléments simples :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}, \qquad \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$$

   Ainsi la fonction $t \mapsto \ln(|t|) - \ln(|t-1|) = \ln\left(\left|\frac{t-1}{t}\right|\right)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(t-1)}$

   On en déduit que, sur chacun de ces intervalles, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \frac{Ct}{t-1}$, avec $C \in \mathbb{R}$

   > **Solutions**
   > À priori les solutions sont de la forme $t \mapsto C\left|\frac{t}{t-1}\right|$ mais les quantités sont de signe constant sur les intervalles considérés donc on peut faire rentrer le signe dans la constante $c$.

   On utilise la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière. Soit $k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

   La fonction $p$ définie sur $I$ par $p(t) = \frac{k(t)t}{t-1}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si, pour tout $t \in I$, $k'(t)t^2 = t$, ce qui équivaut à $k'(t) = \frac{1}{t}$.

   Ainsi $p$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \in I$, $k(t) = \ln(|t|) + c$

   Donc $p$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \in I$, $p(t) = \frac{ct}{t-1} + \frac{t\ln(|t|)}{t-1}$

   — Il faut étudier les recollements éventuels en 0 et en 1 ;

Soit $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ et

$$p : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{c_1 t}{t-1} + \dfrac{t\ln(|t|)}{t-1} & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{c_2 t}{t-1} + \dfrac{t\ln(|t|)}{t-1} & \text{si } t \in ]0,1[ \\ \dfrac{c_3 t}{t-1} + \dfrac{t\ln(|t|)}{t-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Quels que soient $(c_1, c_2, c_3)$ on a $\lim\limits_{t\to 0} p(t) = 0$, toutes les solutions se recollent bien en 0 de manière continue.

Regardons maintenant si ce recollement est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $t \in ]0,1[$ on a

$$p'(t) = \frac{-\ln(|t|) + t - c_2 - 1}{(t-1)^2}$$

Quel que soit $c_2$ on a toujours $\lim\limits_{t\to 0^+} p'(t) = +\infty$, ainsi on ne pourra jamais faire de recollement $\mathcal{C}^1$ en 0.

Étudions la possibilité d'un recollement en 1.

On sait que $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$, ainsi $\lim\limits_{t\to 1^-} p(t) = 1$ si $c_2 = 0$ et $\pm\infty$ si $c_2 \neq 0$, de même en $1^+$.

Il n'y a alors de recollement continu que si $c_2 = c_3 = 0$.

Pour $t \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a alors

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{-\ln(t) + t - 1}{(t-1)^2} \\ &\underset{t\to 1}{=} \frac{-\left((t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + o((t-1)^2)\right) + t - 1}{(t-1)^2} \\ &\underset{t\to 1}{=} \frac{1}{2} + o(1) \\ &\underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La fonction $p$ prolongée par continuité en 1 est continue et sa dérivée admet une limite finie en 1, le théorème de la limite de la dérivée nous permet de conclure que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

2. — Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ l'équation est équivalente à $y' + \dfrac{e^t+1}{e^t-1} y = \dfrac{3+2e^t}{e^t-1}$

Pour $t \neq 0$ on a $\dfrac{e^t+1}{e^t-1} = \dfrac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \dfrac{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)}$

Une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t+1}{e^t-1}$ est ainsi la fonction $t \mapsto 2\ln\left(\left|\operatorname{sh}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|\right)$.

Les solutions de l'équation homogène sont ainsi les fonctions de la forme $t \longmapsto \dfrac{C}{\left(\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ qui peuvent se réécrire sous la forme $t \longmapsto \dfrac{Ce^t}{(e^t-1)^2}$.

Par la méthode de variation de la constante on trouve que les solutions de l'équation avec second membre sur $I$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \dfrac{(C + 3e^{-t} + 2e^t + t)e^t}{(e^t-1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

— Étudions maintenant l'éventuel recollement en 0.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \dfrac{(C + 3e^{-t} + 2e^t + t)e^t}{(e^t-1)^2}$

On a par développement limité

$$\frac{(C+3e^{-t}+2e^{t}+t)e^{t}}{(e^{t}-1)^{2}} \underset{t\to 0}{=} \frac{C+5}{t^{2}} + \frac{25-C}{12} + o(1)$$

Ainsi il n'est possible de faire un recollement continu des solutions en 0 que si $C=-5$.

Prenons donc $C=-5$ et regardons si notre prolongement par continuité en 0 est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $t \neq 0$ on a

$$f'(t) = \frac{e^{t}\left((2-t)\mathrm{e}^{t}-t-2\right)}{(\mathrm{e}^{t}-1)^{3}}$$

Or $(2-t)\mathrm{e}^{t}-t-2 \underset{t\to 0}{=} -\dfrac{t^{3}}{6}+o(t^{3})$, d'où

$$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1\times -\frac{t^{3}}{6}}{t^{3}} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$$

La fonction $f$ prolongée par continuité en 0 est continue et sa dérivée admet une limite finie en 0, le théorème de la limite de la dérivée nous permet de conclure que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

## Corrigé de l'exercice 5

C'est une équation différentielle linéaire, que l'on résout séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

— Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à $xy'-y=x^2$.

Les solutions de l'équation homogène associées sont de la forme $x\mapsto Kx$, où $K\in\mathbb{R}$. Par variation de la constante, on obtient les solutions de l'équation avec second membre qui sont de la forme $x\mapsto Kx+x^2$ avec $K\in\mathbb{R}$.

— Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation est équivalente à $-xy'-y=x^2$.

Les solutions de l'équation homogène associées sont de la forme $x\mapsto \dfrac{K'}{x}$, où $K'\in\mathbb{R}$. Par variation de la constante, on obtient les solutions de l'équation avec second membre qui sont de la forme $x\mapsto \dfrac{K'}{x}-\dfrac{x^2}{3}$ avec $K'\in\mathbb{R}$

— Étude du raccordement en 0.

Soit $(K,K')\in\mathbb{R}^2$ et $f : x\mapsto \begin{cases} Kx+x^2 & \text{si } x>0 \\ \dfrac{K'}{x}-\dfrac{x^2}{3} & \text{si } x<0 \end{cases}$

Pour que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ existe, il faut et il suffit que $K'=0$. Dans ce cas on a bien $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. La fonction $f$ se prolonge donc par continuité en 0.

Regardons maintenant si ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

À droite la fonction $x\mapsto Kx+x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, vaut 0 en 0 et sa dérivée vaut $K$.

À gauche la fonction $x\mapsto \dfrac{x^2}{3}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$, vaut 0 en 0 et sa dérivée vaut 0.

Pour que le prolongement soit de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 il faut et il suffit que $K=0$.

Finalement, il existe une unique solution $f$ de $(E)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il s'agit de la fonction

$$f : x\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{x^2}{3} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

## Corrigé de l'exercice 6

Soit $y$ une solution de l'équation différentielle. On pose $z(t) = ty(t)$.

Comme $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $z$ l'est aussi.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors $z'(t) = y(t) + ty'(t)$ et $z''(t) = 2y'(t) + ty''(t)$.

Ainsi $ty'' + 2y' - aty = z'' - az$, $z$ est ainsi solution de l'équation $z'' - az = 0$.

Comme $a < 0$ il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z(t) = A\cos(\sqrt{-a}t) + B\sin(\sqrt{-a}t)$$

Ainsi

$$\forall t \neq 0, \qquad y(t) = \frac{A\cos(\sqrt{-a}t) + B\sin(\sqrt{-a}t)}{t}$$

Or $y$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On va donc étudier le recollement en 0.

— Au voisinage de 0, $y(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{A}{t} + B\sqrt{a} - \dfrac{At}{2} + o(t)$

  Si $A \neq 0$, $y$ admet une limite infinie en 0, on ne peut donc pas la prolonger par continuité en 0. On a donc $A = 0$.

  Pour $t \neq 0$ on a alors par développement en série entière

$$y(t) = \frac{B\sin(\sqrt{-a}t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{-a}^{2n+1} t^{2n}}{(2n+1)!}$$

  La fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{-a}^{2n+1} t^{2n}}{2n+1)!}$ est une fonction développable en série entière de rayon infini, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction $t \mapsto \dfrac{B\sin(\sqrt{-a}t)}{t}$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On vérifie par un calcul rapide que les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{B\sin(\sqrt{-a}t)}{t}$ prolongées par continuité en 0 sont bien solutions de $(E)$.

Finalement les solutions de $(E)$ sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{B\sin(\sqrt{-a}t)}{t}$ prolongées par continuité en 0

## Corrigé de l'exercice 7

1. Notons $(\mathcal{H})$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$

   Son polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 5$ qui a pour racines $1 + 2i$ et $1 - 2i$. Les solutions de $(\mathcal{H})$ sont donc les fonctions de l'ensemble

$$\mathcal{S}_{(\mathcal{H})} = \left\{x \mapsto e^x \left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de dérivation des composées, $z = y \circ \exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad z'(x) = e^x y'(e^x)$$

   On montre de même que $z'$ est dérivable, comme composée et produit de fonctions dérivables et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad z''(x) = e^x y'(e^x) + e^x e^x y''(e^x) = z'(x) + (e^x)^2 y''(e^x)$$

3. La fonction $y$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t)$$
Ainsi, en prenant $t = e^x > 0$ on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)^2 y''(e^x) + ae^x y'(e^x) + by(e^x) = c(e^x)$$
C'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad z''(x) + (a-1)z'(x) + bz(x) = c(e^x)$$
On en déduit que, si $y$ est solution de $(\mathcal{E})$ alors $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$z'' + (a-1)z' + bz = c(e^x)$$
Réciproquement supposons que $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$z'' + (a-1)z' + bz = c(e^x)$$
C'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)^2 y''(e^x) + ae^x y'(e^x) + by(e^x) = c(e^x)$$
En prenant le cas $x = \ln(t)$ on a alors
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t)$$
C'est-à-dire $y$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$
On a ainsi montré que $y$ était solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$z'' + (a-1)z' + bz = c(e^x)$$
4. Ici, $a = -1$, $b = 5$, on a donc $a - 1 = -2$.
D'après la question 3., la fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ si et seulement si la fonction $z : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $z'' - 2z' + 5z = 0$
On a la bonne surprise de retrouver l'équation résolue dans la partie A. On rappelle que les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto e^x\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$
avec $A$ et $B$ des réels.
On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = y(e^x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y(t) = z(\ln(t))$$
On en déduit que les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto t\left(A\cos(2\ln(t)) + B\sin(2\ln(t))\right) \quad \text{avec } \lambda, \mu(A, B) \in \mathbb{R}^2$$

---

## Corrigé de l'exercice 8

1. Sur $]0, +\infty[$ la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de plus c'est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$.
Ainsi $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
Dans ce cas on a
$$\forall t \in ]0, +\infty[, \qquad f'(t) = \frac{y'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}, \qquad \text{et} \qquad f''(t) = \frac{y''(\sqrt{t})}{4t} - \frac{y'(\sqrt{t})}{4t\sqrt{t}}$$
Ainsi, pour $t \in ]0, +\infty[$ on a
$$y'(\sqrt{t}) = 2\sqrt{t}f'(t) \qquad \text{et} \qquad y''(\sqrt{t}) = 4tf''(t) + 2f'(t)$$

D'où

$$\begin{aligned}\sqrt{t}y''(\sqrt{t}) - y'(\sqrt{t}) + 4t^{\frac{3}{2}}y(\sqrt{t}) &= \sqrt{t}\left(4tf''(t)+2f'(t)\right) - 2\sqrt{t}f'(t) + 4t^{\frac{3}{2}}f(t)\\ &= 4t^{3/2}\left(f''(t)+f(t)\right)\end{aligned}$$

On en déduit que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f$ est solution de l'équation différentielle $f''+f=0$.

2. On a $f''+f=0$ si et seulement si il existe $(,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $f(t)=A\cos(t)+B\sin(t)$.

   Ainsi $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $y(\sqrt{t})=A\cos(t)+B\sin(t)$.

   Par bijectivité de la fonction racine carrée sur $]0,+\infty[$ on en déduit que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $y(x)=A\cos(x^2)+B\sin(x^2)$.

3. Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et $y\ :\ \begin{array}{ccc} ]-\infty,0[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x^2)+B\sin(x^2)\end{array}$.

   On a alors $xy''(x)-y'(x)+4x^3y(x)=0$.

   Ainsi, en notant $\mathscr{S}^-$ l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]-\infty,0[$ on a

   $$\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos(x^2),x\mapsto\sin(x^2))\subset\mathscr{S}^-$$

   Or le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que $\mathscr{S}^-$ est une espace vectoriel de dimension 2. Puisque la famille $(x\mapsto\cos(x^2),x\mapsto\sin(x^2))$ est libre on en déduit que

   $$\mathscr{S}^- = \mathrm{Vect}(x\mapsto\cos(x^2),x\mapsto\sin(x^2))$$

4. Toutes les solutions précédentes se recollent bien de manière $\mathcal{C}^1$ en 0, ainsi, l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est $\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos(x^2),x\mapsto\sin(x^2))$.

---

## Corrigé de l'exercice 9

1. Il s'agit d'une équation d'Euler (c.f. Exercice 7), on sait que $y$ est solution de l'équation $(E)$ sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction $z : x\mapsto y(\mathrm{e}^x)$ est solution de $(E') : z''+3z'+2z=1$

   Cette équation à la fonction constante en $1/2$ comme solution particulière et l'équation caractéristique associée à l'équation homogène liée à $(E')$ a pour racines $-1$ et $-2$. Ainsi, les solutions de $(E')$ sont de la forme :

   $$z : x\mapsto\frac{1}{2}+C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

   où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes réelles. Finalement, les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme :

   $$y : t\mapsto\frac{1}{2}+\frac{C_1}{t}+\frac{C_2}{t^2}$$

   où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes réelles.

2. Soit $y$ une solution de $(E)$ sur $]-\infty,0[$ on a ainsi

   $$\forall t<0,\qquad t^2y''(t)+4ty'(t)+2y(t)=1$$

   D'où, en prenant $t=-s$

   $$\forall s>0,\qquad s^2y''(-s)-4sy'(-s)+2y(-s)=1$$

   Soit $w : s\mapsto y(-s)$, on a alors $w'(s)=-y'(-s)$ et $w''(s)=y''(-s)$. Ainsi

   $$\forall s>0,\qquad s^2w''(s)+4sw'(s)+2w(s)=1$$

   Il existe donc $D_1$ et $D_2$ deux constantes réelles telles que

   $$\forall s>0,\qquad w(s)=\frac{1}{2}+D_1\mathrm{e}^{-s}+D_2\mathrm{e}^{-2s}$$

   D'où

   $$\forall t<0,\qquad y(t)=\frac{1}{2}+D_1\mathrm{e}^{t}+D_2\mathrm{e}^{2t}$$

## Corrigé de l'exercice 10

1. On pose, pour $u \in ]0, \pi[$, $z(u) = y(\cos u)$, de sorte que $y(t) = z(\arccos t)$. Si $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $z$ aussi par composition.

   Pour $u \in ]0, \pi[$ on a $z'(u) = -\sin(u)y'(\cos(u))$ et $z''(u) = -\cos(u)y'(\cos(u)) + \sin^2(u)y''(\cos(u))$.

   Comme arccos est une bijection de $]-1, 1[$ sur $]0, \pi[$, $y$ est solution de $(E)$ sur $]-1, 1[$ si et seulement si $z$ est solution de $z'' + z = 0$ sur $]0, \pi[$. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que,
   $$\forall u \in ]0, \pi[, \qquad z(u) = A\cos(u) + B\sin(u)$$
   On a de plus $z(u) = A\cos(u) + B\sqrt{1 - \cos^2(u)}$ car $u \in ]0, \pi[$ donc $\sin(u) \geqslant 0$

   Ainsi, pour tout $t \in ]-1, 1[$, $y(t) = At + B\sqrt{1 - t^2}$.
2. On pose, pour $u \in ]0, +\infty[$, $z(u) = y(\operatorname{ch}(u))$, de sorte que $y(t) = z(\operatorname{argch}(t))$. Si $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $z$ aussi par composition.

   Pour $u > 0$ on a alors $z'(u) = \operatorname{sh}(u)y'(\operatorname{ch}(u))$ et $z''(u) = \operatorname{ch}(u)y'(\operatorname{ch}(u)) + \operatorname{sh}^2(u)y''(\operatorname{ch}(u))$.

   Comme argch est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, alors $y$ est solution de $(E)$ sur $]1, +\infty[$ si et seulement si $z$ est solution de $z'' - z = 0$ sur $]0, +\infty[$.

   On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$\forall u > 0, \qquad z(u) = A\operatorname{ch}(u) + B\operatorname{sh}(u)$$
   Puisque $u > 0$ on a donc $\operatorname{sh}(u) > 0$, d'où $z(u) = A\operatorname{ch}(u) + B\sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - 1}$

   Ainsi, pour tout $t > 1$, $y(t) = At + B\sqrt{t^2 - 1}$.
3. La solution générale trouvée sur l'intervalle $]1, +\infty[$ est aussi définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, -1[$, et elle vérifie l'équation sur cet intervalle. Comme on sait que les solutions sur $]-\infty, -1[$ forment un sous espace vectoriel de dimension 2, cela nous donne toutes les solutions sur cet intervalle.
4. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $y \ : \ \begin{array}{ccc} ]-1,1[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & At + B\sqrt{1-t^2} \end{array}$

   Pour $t \in ]-1, 1[$ on a $y'(t) = A - \dfrac{Bt}{\sqrt{1 - t^2}}$. Ainsi $y'$ admet une limite finie en 1 et/ou $-1$ si et seulement si $B = 0$.

   De même les fonctions $t \mapsto At + B\sqrt{t^2 - 1}$ ne peuvent être prolongé de manière $\mathcal{C}^1$ en 1 et/ou $-1$ que si $B = 0$.

   Ainsi les seules solutions de $(E)$sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto At$, avec$A \in \mathbb{R}$.
5. Si on cherche une solution de l'équation $(E)$ sous forme polynomiale on trouve que la fonction $t \mapsto t$ est solution. On cherche ensuite les solutions de $(E)$ sous la forme $t \mapsto K(t)t$.

   Une telle fonction est solution de $(E)$ si et seulement si $K$ vérifie l'équation $(t - t^3)K'' + (2 - 3t^2)K' = 0$.

   Ainsi $K'$ doit être une solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(t - t^3)z' + (2 - 3t^2)z = 0$.

   Plaçons nous sur $]1, +\infty[$, cette équation est équivalente à $z' + \dfrac{3t^2 - 2}{t^3 - t}z = 0$.

   Une décomposition en éléments simples nous donne
   $$\frac{3t^2 - 2}{t^3 - t} = \frac{1}{2\,(t+1)} + \frac{2}{t} + \frac{1}{2\,(t-1)}$$
   Ainsi, les solutions de $z' + \dfrac{3t^2 - 2}{t^3 - t}z = 0$ sont les fonctions de la forme
   $$t \mapsto A\exp\left(-\frac{\ln(t+1)}{2} - 2\ln(t) - \frac{\ln(t-1)}{2}\right) = \frac{A}{t^2\sqrt{t^2 - 1}}$$
   Primitivons maintenant ces fonctions.

Pour $t_0 > 1$ et $t > 1$ on a

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s^2\sqrt{s^2-1}}\,\mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{t_0}}^{\frac{1}{t}} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{u^2}^2-1}}\,\mathrm{d}u \qquad \textit{changement de variable } u=\frac{1}{s}\\
&= \int_{\frac{1}{t_0}}^{\frac{1}{t}} \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\\
&= \left[\sqrt{1-u^2}\right]_{\frac{1}{t_0}}^{\frac{1}{t}}\\
&= \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{t_0^2}}\\
&= \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} - \frac{\sqrt{t_0^2-1}}{t_0}
\end{aligned}$$

Ainsi les primitives des fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{A}{t^2\sqrt{t^2-1}}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t} + B$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

En d'autres termes $K$ vérifie $(t-t^3)K''+(2-3t^2)K' = 0$ si et seulement si il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $K : t \mapsto A\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t} + B$.

On en déduit que les solutions de $(E)$ sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\sqrt{t^2-1} + Bt$ ce qui est bien le résultat obtenu plus tôt.

On procède mutatis mutandis sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,1[$.

---

## Corrigé de l'exercice 11

Soit $y$ une solution de $(E)$ et $z : t \mapsto t^2y(t)$. $z$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall t > 0, \qquad z'(t) = 2ty(t) + t^2y'(t), \qquad z''(t) = 2y(t) + 4ty'(t) + t^2y''(t)$$

Ainsi $t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2-t^2)y(t) = z''(t) - z(t)$, $z$ est donc une solution de l'équation différentielle $z'' - z = 1$.

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} - 1\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y : t \mapsto \dfrac{A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} - 1}{t^2}$.

Réciproquement on vérifie sans difficulté que ces fonctions sont bien des solutions de $(E)$ sur $]0,+\infty[$.

Finalement l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]0,+\infty[$ est

$$\mathscr{S}_E = \{t \mapsto \frac{A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} - 1}{t^2}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

---

## Corrigé de l'exercice 12

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)f''(x) - f'(x) - xf(x) = \left(\alpha^2 - \alpha + x(\alpha^2-1)\right)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ étant libre on en déduit que $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\alpha = 1$.

2. On cherche les solutions de $(E)$ sous la forme $f : x \mapsto K(x)\mathrm{e}^{x}$. Une telle fonction est solution de $(E)$ si et seulement si $K$ vérifie

$$\forall t > -1, \qquad \mathrm{e}^{t}(t+1)K''(t) + \mathrm{e}^{t}(2t+1)K'(t) = 0$$

Ainsi $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $K'$ est solution de $(\tilde{E}) : y' + \dfrac{2t+1}{t+1}y = 0$.

Les solutions de $(\tilde{E})$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\mathrm{e}^{-2t+\ln(t+1)} = A(t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

Une telle fonction se primitive aisément par intégration par parties.

Les fonctions $K$ telles que, pour $t > -1$, $\mathrm{e}^{t}(t+1)K''(t) + \mathrm{e}^{t}(2t+1)K'(t) = 0$ sont alors les fonctions de la forme $K : t \mapsto B - \dfrac{(2t+3)A}{4}\mathrm{e}^{-2t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(E)$ est

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto B\mathrm{e}^{t} + (2t+3)A\mathrm{e}^{-t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

---

## Corrigé de l'exercice 13

1. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x^2)h''(x) + 4xh'(x) + \frac{1+2x^2}{1+x^2}h(x) = 0$$

Ainsi $h$ n'est pas solution de $(E)$ mais est solution de l'équation différentielle homogène associée.

2. On cherche les solutions de $(E)$ sous la forme $f : x \mapsto \dfrac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Une telle fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $K$ est solution de $(x^2+1)y''+2xy' = 1$ ou encore si et seulement si $K'$ est solution de $(x^2+1)y' + 2xy = 1$.

Les solutions de l'équation homogène associé sont de la forme $x \mapsto \dfrac{A}{1+x^2}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante on en déduit que les solutions de l'équation $(x^2+1)y' + 2xy = 1$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{A}{1+x^2} + \dfrac{x}{x^2+1}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Par primitivation $K$ est solution de $(x^2+1)y''+2xy' = 1$ si et seulement il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad K(x) = A\arctan(x) + B + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

Finalement l'ensemble des solutions de $(E)$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{A\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

---

## Corrigé de l'exercice 14

— Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(X) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$. $\chi_A$ est scindé à racines simples, donc $A$ est diagonalisable.

On obtient $E_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

On a alors $D = P^{-1}AP$. Soit $x, y$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Le système différentiel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ équivaut au système $P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = DP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

On pose $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Notre système est alors équivalent à $\begin{cases} x_1' &= \sqrt{2}x_1 \\ y_1' &= -\sqrt{2}y_1 \end{cases}$

Un couple de fonction $(x_1, y_1)$ est ainsi solution s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = a\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}$ et $y_1(t) = b\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}$.

Or $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est solution du système si et seulement il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = a\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}$ et $y(t) = a(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} - b(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}$

— On va voir une autre méthode pour résoudre les systèmes linéaires $2 \times 2$ à coefficients constants.

> **Autre méthode**
> Cette méthode ne fonctionne que pour les systèmes $2 \times 2$ mais a l'avantage d'être plus rapide et surtout au programme.

Soit $(x,y)$ solution de $\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases}$

On a alors

$$\begin{aligned} x'' &= x' + y' \\ &= x' + x - y \\ &= x' + x - (x' - x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$x$ est solution de l'équation $x'' = 2x$, on en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^2, \qquad x(t) = a\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}$$

On a ensuite $y = x' - x$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}^2, \qquad y(t) = a(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} - b(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}$$

— On pourrait reprendre la méthode matricielle mais on va essayer de résoudre le système en restant dans les limites du programme

L'équation $y' = 2y$ admet pour solution les fonctions de la forme $y : t \mapsto A\mathrm{e}^{2t}$, où $A \in \mathbb{R}$.

L'équation $x' = x - y$ devient alors $x' - x = -A\mathrm{e}^{2t}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qui admet comme solution les fonctions de la forme $t \mapsto B\mathrm{e}^{t} - A\mathrm{e}^{2t}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Finalement $x$ et $y$ sont solutions de ce système si et seulement si il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = B\mathrm{e}^{t} - A\mathrm{e}^{2t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = A\mathrm{e}^{2t}$$

---

## Corrigé de l'exercice 15

Soit $y$ une solution de l'équation différentielle linéaire.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, on a alors $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Par le calcul on a $\chi_A = X^3 - 3X^2 - X + 3$. 1 est racine évidente de ce polynôme ce qui nous permet de la factoriser : $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-3)$

$A$ est une matrice carrée de taille 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable

Soit $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

En posant $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ on a alors le système $\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= 3x_3 \end{cases}$

Il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^t \\ b\mathrm{e}^{-t} \\ c\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$

On a alors $\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^t \\ b\mathrm{e}^{-t} \\ c\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$

$y$ est ainsi une combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{3t}$.

En d'autres termes, il existe $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} + C\mathrm{e}^{3t}$$

## Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $(P,Q) \in E^2$ et $a \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(P+aQ) = (X+1)(P+aQ)'+(P+aQ) = (X+1)P'+P+a\left((X+1)Q'+Q\right) = f(P)+af(Q)$$

$f$ est donc linéaire.

De plus $\deg(f(P)) \leqslant \max(\deg((X+1)P', \deg(P)) \leqslant \max(1+\deg(P)-1, \deg(P)) \leqslant n$. Ainsi $f(P) \in E$.

Finalement $f$ est bien un endomorphisme de $E$.

2. On a $f(1) = 1$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $f(X^k) = (k+1)X^k + kX^{k-1}$ La matrice de $f$ dans la base canonique est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{Can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire donc ses valeurs propres (qui sont aussi celles de $f$) sont ses coefficients diagonaux. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = [\![1, n+1]\!]$.

$f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable.

3. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, un polynôme $P$ est un vecteur propre de $f$ pour la valeur propre $k$ si et seulement il est solution de l'équation différentielle $(x+1)y' + y = ky$.

Sur $]-1, +\infty[$ cette équation est équivalente à $y' + \dfrac{1-k}{x+1}y = 0$ qui a pour ensemble de solutions $\{x \mapsto A(x+1)^{k-1} \ , \ A \in \mathbb{R}\}$

Un vecteur propre de $f$ pour la valeur propre doit alors coïncider avec une fonction polynomiale de la forme $x \mapsto A(x+1)^{k-1}$ sur $]-1,+\infty[$. Comme cet ensemble est infini cela nous indique que les seuls vecteurs propres possibles de $f$ pour la valeur propre $k$ sont les polynômes de $\mathrm{Vect}((X+1)^{k-1})$.

**Polynômes**

Deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux partout car leur différence admet une infinité de racines.

On vérifie aisément que ces polynômes sont bien des vecteurs propres de $f$.

Finalement, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ on a $E_k(f) = \mathrm{Vect}((X+1)^{k-1})$

## Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathcal{C}^1([0,+\infty[)$ par $\varphi(f) = f(0)$.

   $\varphi$ est linéaire et $E = \mathrm{Ker}(\varphi)$ ainsi $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,+\infty[)$ et donc un espace vectoriel.

2. Soit $f \in E$, pour $t \neq 0$ on a $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est ainsi prolongeable par continuité en 0.

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est ainsi prolongeable par continuité en 0. L'intégrale définissant la fonction $T(f)$ est ainsi faussement impropre, $T(f)$ est donc bien définie.

   De plus $T(f)$ est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$, $T(f)$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ; On a également $T(f)(0) = 0$. Ainsi $T(f) \in E$.

4. Il ne nous reste plus qu'à montrer la linéarité.

   Soit $(f,g) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Pour $x \geqslant 0$ on a

   $$T(f+\alpha g)(x) = \int_0^x \frac{(f+\alpha g)(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)+\alpha g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \alpha\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = T(f)(x)+\alpha T(g)(x)$$

   Ainsi $T$ est linéaire. Comme on sait que, pour toute fonction $f \in e$ on a $T(f) \in E$ on en déduit que $T$ est un endomorphisme de $E$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche s'il existe des fonctions $f \in E$ telles que $T(f) = \lambda f$.

   On va procéder par analyse-synthèse.

   Analyse :

   Soit $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$.

   On a alors $T(f)' = \lambda f$, i.e. $\lambda f' = \dfrac{1}{t} f$.

   Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$. Un vecteur propre étant nécessairement non-nul on en déduit que 0 n'est pas une valeur propre de $f$.

   Pour $\lambda \neq 0$, $f$ est une solution de l'équation différentielle $f' - \dfrac{1}{\lambda t} f = 0$ sur $]0,+\infty[$.

   L'ensemble des solutions de cette équation sur $]0,+\infty[$ est $\left\{t \mapsto At^{\frac{1}{\lambda}}\ ,\ a \in \mathbb{R}\right\}$

   Si $\lambda$ est négatif aucune de ces fonctions à part la fonction nulle n'est prolongeable par continuité en 0. Puisque $f \in E$ on a donc $f = 0$. Là encore on en déduit que $\lambda$ n'est pas une valeur propre de $f$.

   Si $\lambda > 1$ alors $\dfrac{1}{\lambda} < 1$, les fonctions $t \mapsto At^{\frac{1}{\lambda}}$ avec $A \neq 0$ se prolonge par continuité en 0 mais ce prolongement n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Puisque $f \in E$ on a donc $f = 0$. Là encore on en déduit que $\lambda$ n'est pas une valeur propre de $f$.

   Synthèse :

   Si $\lambda \in ]0,1]$ alors les fonctions $t \mapsto At^{\frac{1}{\lambda}}$ avec $A \neq 0$ se prolongent par continuité en 0 et le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$, ce sont bien des éléments de $E$.

   Par calcul on a, pour $x \geqslant 0$,

   $$\int_0^x \frac{At^{\frac{1}{\lambda}}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x At^{\frac{1}{\lambda}-1}\,\mathrm{d}t = \left[\lambda At^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^x = \lambda Ax^{\frac{1}{\lambda}}$$

   Ainsi, les fonctions $t \mapsto At^{\frac{1}{\lambda}}$ avec $A \neq 0$ sont bien des vecteurs propres de $T$ pour la valeur propre $\lambda$.

   Finalement $\mathrm{Sp}(T) = ]0,1]$ et, pour $\lambda \in ]0,1]$ on a $E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$.

## Corrigé de l'exercice 18

1. On cherche une solution de $(E)$ développable en série entière de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif.

   Si $y$ est développable en série entière de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ alors, pour $x \in ]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned} xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2a_1 + 2\sum_{n=2}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} \\ &= 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 2na_n + a_{n-2}\right) x^{n-1} \\ &= 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n+1)a_n + a_{n-2}\right) x^{n-1} \end{aligned}$$

   Par unicité du développement en série entière $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+3)} a_n$.

   On en déduit que, pour tout entier $n$ impair on a $a_n = 0$

   Si $n$ est pair il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, d'où $a_{2p+2} = \dfrac{-1}{(2p+2)(2p+3)} a_{2p}$.

   On peut alors montrer par une récurrence aisée (laissée au lecteur) que, pour $p \in \mathbb{N}$ on a $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}$

   Ainsi, pour $x \in ]-R, R[$ on a

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

   Le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$ d'après le critère de D'Alembert pour les séries numériques.

2. On reconnaît dans la question précédente le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

   On résout désormais $(E)$ par la méthode de variation de la constante : on va chercher une solution de $(E)$ sous la forme $fx \mapsto K(x)\dfrac{\sin(x)}{x}$ avec $K$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   Une telle fonction est solution de $(E)$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x)K''(x) + 2\cos(x)K'(x) = 0$$

   Ainsi $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $K'$ est solution de $\sin(x)y' + 2\cos(x)y = 0$.

   Sur tout intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$ cette équation est équivalente à $y' + \dfrac{2\cos(x)}{\sin(x)} y = 0$.

   L'ensemble des solutions de cette équation est $\{x \mapsto A\exp\left(-2\ln(|\sin(x)|\right)\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$, i.e. $\left\{x \mapsto \dfrac{A}{\sin(x)^2}\ ,\ a \in \mathbb{R}\right\}$

   Pour $x \in ]k\pi, (k+1)\pi[$ on a

$$\frac{1}{\sin(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}\frac{1}{\tan(x)^2} = \frac{\tan'(x)}{\tan(x)^2}$$

   Ainsi $f$ est solution de $(E)$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in ]k\pi, (k+1)\pi[ \qquad K(x) = \frac{-A}{\tan(x)} + B$$

D'où $f$ est solution de $(E)$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ si et seulement si il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x\in]k\pi,(k+1)\pi[\qquad f(x)=\frac{A\cos(x)}{x}+B\frac{\sin(x)}{x}$$

Une telle fonction se prolonge par continuité en tout réel de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

Par contre elle se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $A=0$.

Finalement l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ est

$$\left\{x\mapsto\frac{A\cos(x)}{x}+B\frac{\sin(x)}{x}\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

mais l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{x\mapsto B\frac{\sin(x)}{x}\ ,\ B\in\mathbb{R}\right\}$$

---

## Corrigé de l'exercice 19

On va procéder par analyse-synthèse

Analyse :

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f''(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$$

idée

L'idée est de décomposer $f$ suivant sa partie paire et sa partie impaire.

Soit $g:x\mapsto f(x)-f(-x)$ et $h:x\mapsto f(x)+f(-x)$

On a alors, pour $x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=f'(x)+f'(-x)\qquad g''(x)=f''(x)-f''(-x)\qquad h'(x)=f'(x)-f'(-x)\qquad h''(x)=f''(x)+f''(-x)$$

D'où

$$f''(x)+f(-x)=\frac{h''(x)+g''(x)+h(x)-g(x)}{2}$$

On a ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{h''(x)+h(x)}{2}+\frac{g''(x)-g(x)}{2}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$$

D'où, en $-x$, $\dfrac{h''(-x)+h(-x)}{2}+\dfrac{g''(-x)-g(-x)}{2}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

Or, $g$ et $g''$ sont impaires et $h$ et $h''$ sont paires, ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{h''(x)+h(x)}{2}-\frac{g''(x)-g(x)}{2}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$$

Par addition et soustraction de ces deux équations on en déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$h''(x)+h(x)=2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x},\qquad\text{et}\qquad g''(x)-g(x)=0$$

La première équation a pour ensemble de solutions $\{x\mapsto\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+A\cos(x)+B\sin(x)\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$ et la seconde a pour ensemble de solutions $\{x\mapsto C\,\mathrm{ch}(x)+D\,\mathrm{sh}(x)\ ,\ (C,D)\in\mathbb{R}^2\}$.

Puisque $h$ est paire et $g$ est impaire alors il existe $(A,D)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad h(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+A\cos(x)\qquad\text{et}\qquad g(x)=D\,\mathrm{sh}(x)$$

D'où, puisque $f=\dfrac{h+g}{2}$, il existe donc $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=\mathrm{ch}(x)+a\cos(x)+b\,\mathrm{sh}(x)$$

Synthèse :

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f : x\mapsto \operatorname{ch}(x)+a\cos(x)+b\operatorname{sh}(x)$. $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

De plus, on a, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f''(x)+f(-x) &= \operatorname{ch}(x)-a\cos(x)+b\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(-x)+a\cos(-x)+b\operatorname{sh}(-x)\\
&= \operatorname{ch}(x)-a\cos(x)+b\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x)+a\cos(x)-b\operatorname{sh}(x)\\
&= 2\operatorname{ch}(x)\\
&= \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Finalement les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f''(x)-f(-x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$$

sont exactement les fonctions de la forme $x\mapsto \operatorname{ch}(x)+a\cos(x)+b\operatorname{sh}(x)$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

---

## Corrigé de l'exercice 20

On cherche une solution de $(E)$ développable en série entière de la forme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence strictement positif.

Si $y$ est développable en série entière de la forme $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon $R>0$ alors, pour $x\in]-R,R[$ on a

$$\begin{aligned}
xy''(x)+(x-2)y'(x)-2y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(n+1)a_{n+1}+na_n-2(n+1)a_{n+1}-2a_n\right)x^n-2a_1-2a_0\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(n-2)\left((n+1)a_{n+1}+a_n\right)x^n-2a_1-2a_0\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)\left((n+1)a_{n+1}+a_n\right)x^n-(2a_2+a_1)x-2a_1-2a_0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, $y$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\begin{cases}-2(a_1+a_0)=2\\ -(2a_2+a_1)=1\\ \forall n\geqslant 2,\qquad (n-2)\left((n+1)a_{n+1}+a_n\right)\end{cases}$$

D'où si et seulement

$$\begin{cases}a_1=-1-a_0\\ a_2=\dfrac{a_0}{2}\\ \forall n\geqslant 3,\qquad a_{n+1}=\dfrac{-1}{n+1}a_n\end{cases}$$

On montre aisément par récurrence qu'alors, pour tout $n\geqslant 3$, $a_n=\dfrac{6(-1)^{n-3}}{n!}a_3$

On a ainsi, pour $x\in]-R,R[$

$$\begin{aligned}
y(x) &= -x+a_0\left(1-x+\frac{x}{2}\right)-6a_3\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}n!\\
&= -x+a_0\left(1-x+\frac{x}{2}\right)-6a_3\left(\mathrm{e}^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}\right)\quad = -x+(a_0+6a_3)\left(1-x+\frac{x}{2}\right)-6a_3\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $y$ est une solution développable en série entière alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = -x + a\left(1 - x + \frac{x}{2}\right) + b\mathrm{e}^{-x}$$

Réciproquement on vérifie par un calcul rapide que les fonctions de cette forme sont bien des solutions de l'équation différentielle.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est une ensemble de la forme $\{x \mapsto y_p(x) + ay_1(x) + by_2(x)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ où $y_p$ est une solution de l'équation et $(y_1, y_2)$ une famille libre de solutions de l'équation homogène associée.

La famille $\left(x \mapsto 1 - x + \dfrac{x}{2}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\right)$ étant libre, on a bien trouvé toutes les solutions de l'équation différentielle.

---

## Corrigé de l'exercice 21

1. L'équation différentielle $u'' - u = 0$ a pour ensemble des solutions

$$\mathscr{S} = \{x \mapsto A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. Soit $y$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $z : x \mapsto x^2 y(x)$.

   $z$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x), \qquad z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x)$$

   Ainsi $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = z''(x) - z(x)$.

   On en déduit que $y$ est une solution de $(E)$ si et seulement si $z$ est donc une solution de l'équation différentielle $z'' - z = 0$.

   Ainsi, $y$ est une solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ si et seulement si il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y : x \mapsto \dfrac{A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)}{x^2}$.

3. On cherche une solution de $(E)$ développable en série entière de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif.

   Si $y$ est développable en série entière de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ alors, pour $x \in ]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned}
x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}\right) x^n + 6a_1 x + 2a_0 \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2}\right) x^n + +6a_1 x + 2a_0
\end{aligned}$$

   Par unicité du développement en série entière, $y$ est alors solution de $(E)$ si et seulement si $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n-2} = (n^2 - 3n + 2)a_n = (n+1)(n+2)a_n$.

   Pour $n \geqslant 2$ on a alors $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.

   On en déduit par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p+2)!} = 0$ et, pour $p \geqslant 0$, $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p+2)!} = 0$.

**Inutile ?**

La question précédente nous permet de répondre puisqu'on prouve assez facilement que la seule solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ qui se prolonge par continuité en 0 est la fonction nulle. On peut supposer que l'examinateur voulait voir si les candidats savaient chercher les solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Ainsi la seule solution de $(E)$ développable en série entière au voisinage de 0 est la fonction nulle.

4. Finalement $y$ est une solution de $(E)$ sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$ si et seulement si il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y : x \mapsto \dfrac{A\operatorname{ch}(x)+B\operatorname{sh}(x)}{x^2}$.

   Si $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ alors $\dfrac{A\operatorname{ch}(x)+B\operatorname{sh}(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{A+Bx+o(x)}{x^2}$.

   Une telle fonction admet une limite finie en 0 si et seulement si $A=B=0$. La seule solution admettant une limite finie à droite en 0 est la fonction nulle.

---

## Corrigé de l'exercice 22

Soit $(x,y)$ un couple de fonctions solution du système.

On a alors

$$x'' = 7x' - y' = 7x' - x - 5y = 7x' - x - 5(7x - x') = 7x' - x - 35x + 5x' = 12x' - 36x$$

Puisque $x$ vérifie $x'' - 12x' + 36x$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad x(t) = (A+Bt)\mathrm{e}^{6t}$$

On a alors $y = 7x - x'$, d'où

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t) = (A-B+Bt)\mathrm{e}^{6t}$$

Réciproquement, s'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad x(t) = (A+Bt)\mathrm{e}^{6t} \qquad y(t) = (A-B+Bt)\mathrm{e}^{6t}$$

Alors on a bien $y = 7x - x'$ et, pour $t\in\mathbb{R}$

$$y'(t) = (6A - 5B + 6Bt)\mathrm{e}^{6t} = x(t) + 5y(t)$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des fonctions $x : t \mapsto (A+Bt)\mathrm{e}^{6t}$ et $y : t\mapsto (A-B+Bt)\mathrm{e}^{6t}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.